ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2001, т. 232, с. 19–24

О работах С.М. Никольского по теории приближения функций[1]

©2001 г. С. А. Теляковский

Первые математические исследования С.М. Никольского относились к теории линейных операторов в линейных нормированных пространствах, где он получил существенные результаты, связанные со справедливостью альтернативы Фредгольма для линейных уравнений.

Затем до 1951 г. его творчество было посвящено различным задачам теории приближения функций. В настоящем обзоре отражены некоторые принципиальные результаты, полученные С.М. Никольским в этот период. К сожалению, за рамками обзора остаются многие другие важные его результаты. Отметим в этой связи, что работам С.М. Никольского по теории приближений и их развитию посвящена большая статья Н.П. Корнейчука [1].

В 1951 г. вышла статья С.М. Никольского [2], в которой установлены неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Эти результаты послужили основой для исследований самого Сергея Михайловича и его многочисленных последователей по теоремам вложения пространств дифференцируемых функций многих переменных и их приложениям к задачам математической физики.

В последующие годы творчество С.М. Никольского проходило в значительной степени в этих направлениях. Об этих исследованиях говорится в обзоре О.В. Бесова [3].

1. ВЕРХНИЕ ГРАНИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Исследование скорости приближения периодических функций частными суммами рядов Фурье было начато А. Лебегом [4]. В качестве характеристики аппроксимативных свойств сумм Фурье на классе функций $\mathfrak{M}$ он рассматривал верхнюю грань уклонений по классу

$$S_n(\mathfrak{M}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f(x) - s_n(f,x)\|_C. \tag{1.1}$$

Лебег доказал, что для класса функций $H(\omega)$, модуль непрерывности которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, справедливо порядковое равенство

$$S_n(H(\omega)) \sim \omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n\to\infty.$$

Следующий шаг в изучении верхних граней (1.1) был сделан А.Н. Колмогоровым [5]. Он получил асимптотическую формулу для величин (1.1), когда в качестве $\mathfrak{M}$ взят класс функций W^r_C, $r=1,2,\dots$, у которых производная порядка $r-1$ абсолютно непрерывна, а производная порядка r там, где она существует, удовлетворяет условию $|f^{(r)}(x)|\le 1$:

$$S_n(W^r_C) = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \qquad n\to\infty. \tag{1.2}$$

[1] Доклад, прочитанный 3 мая 2000 г. на Международной конференции “Современные проблемы теории функций и функциональных пространств", посвященной 95-летию академика Сергея Михайловича Никольского (Москва).

Первым значительным продолжением этого результата Колмогорова был цикл работ С.М. Никольского 1940–1946 гг. [6–12]. В них, помимо величин (1.1) для сумм Фурье, рассмотрены также аналогичные верхние грани для приближений на классах функций суммами Фейера и интерполяционными полиномами.

Приведем результат С.М. Никольского о приближении суммами Фурье классов функций $W^rH(\omega)$, $r=1,2,\dots$, у которых производная $f^{(r)}\in H(\omega)$, где ω — выпуклый вверх модуль непрерывности:

$$S_n(W^rH(\omega))=\frac{2}{\pi^2}\,\frac{\ln n}{n^r}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\biggl(\frac{2t}{n}\biggr)\sin t\,dt+O\biggl(\frac{1}{n^r}\,\omega\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr),\qquad n\to\infty. \tag{1.3}$$

Заметим, что для получения оценки (1.3) Никольским был разработан новый метод исследования. Это было необходимо, поскольку экстремальные функции в (1.3) имеют значительно более сложную природу, чем в оценке Колмогорова (1.2).

После указанных работ А.Н. Колмогорова и С.М. Никольского задача об асимптотическом поведении величин, подобных верхним граням (1.1), изучалась многими авторами в различных постановках. Эту задачу называют иногда задачей Колмогорова–Никольского.

2. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Нахождение верхних граней вида (1.1) на классах функций, представимых в виде свертки, сводится к задаче о приближении ядра свертки в метрике сопряженного пространства.

С.М. Никольский [12] рассмотрел подобную закономерность в общем виде.

Пусть B — банахово пространство и B^* — сопряженное с ним пространство.

Зафиксируем элементы $x_1,\dots,x_n$ из пространства B. Тогда для наилучших приближений произвольного элемента $x\in B$ полиномами по системе $x_1,\dots,x_n$ справедливо равенство

$$\min_{a_k}\biggl\|x-\sum_{k=1}^n a_kx_k\biggr\|_B=\max_F F(x),$$

где максимум берется по всем линейным функционалам $F\in B^*$, удовлетворяющим условиям $\|F\|_{B^*}\le 1$ и $F(x_1)=\ldots=F(x_n)=0$.

Другая теорема двойственности Никольского относится к случаю, когда фиксируются линейные функционалы $F_1,\dots,F_n$ из B^* и произвольный функционал $F\in B^*$ приближается полиномами по системе $F_1,\dots,F_n$. Тогда

$$\min_{a_k}\biggl\|F-\sum_{k=1}^n a_kF_k\biggr\|_{B^*}=\sup_x F(x),$$

где верхняя грань берется по всем элементам $x\in B$, удовлетворяющим условиям $\|x\|_B\le 1$ и $F_1(x)=\ldots=F_n(x)=0$.

Теоремы двойственности С.М. Никольского стали отправной точкой дальнейших исследований экстремальных задач функционального анализа. Кроме того, они открыли подходы к решению ряда задач теории приближения функций.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ

Первые приложения приведенных выше теорем двойственности к задачам теории приближений были даны С.М. Никольским в той же работе [12].

Пусть W_L^r, $r = 1, 2, \dots,$ — класс 2π-периодических функций f, производная порядка r которых удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\|_L \le 1$. Тогда для верхних граней наилучших приближений тригонометрическими полиномами порядка n в метрике C функций из W_C^r и наилучших приближений в метрике L функций из W_L^r справедливо равенство

$$E_n(W_C^r)_C = E_n(W_L^r)_L, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.1}$$

Значения величин $E_n(W_C^r)_C$ были к этому времени найдены Ж. Фаваром [13]. Таким образом, благодаря равенству (3.1) стали известны и значения $E_n(W_L^r)_L$.

Равенство вида (3.1) было установлено в [12] также для наилучших приближений классов функций $\overline{W}_C^r$ и $\overline{W}_L^r$, сопряженных соответственно с функциями из W_C^r и W_L^r.

Более того, С.М. Никольский установил, что аналогичное равенство имеет место для классов функций f, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x)\varphi(t)\,dt,$$

где $K(t) \in L$ — ядро свертки, удовлетворяющее определенным условиям, а для функций φ справедливы неравенства $\|\varphi(x)\|_C \le 1$ или $\|\varphi(x)\|_L \le 1$.

При этом для широкого класса ядер $K(t)$ им были найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы совпадали верхние грани наилучших приближений соответствующих классов функций в метриках C и L.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ С УЛУЧШЕНИЕМ ПОРЯДКА ВБЛИЗИ КОНЦОВ ОТРЕЗКА

Приближение функций алгебраическими многочленами для удобства сравнения с приближениями периодических функций изучается обычно на отрезке $[-1, 1]$. В этом разделе для простоты формулировок ограничимся рассмотрением классов $\operatorname{Lip}\alpha$ функций f, удовлетворяющих на $[-1, 1]$ условию Липшица порядка α

$$|f(x') - f(x'')| \le M|x' - x''|^\alpha, \qquad M > 0, \quad 0 < \alpha \le 1. \tag{4.1}$$

Уже в первых работах Д. Джексона, С.Н. Бернштейна и Ш.-Ж. Валле Пуссена 1911–1919 гг., посвященных прямым и обратным теоремам теории приближений, было выяснено, что прямые теоремы в тригонометрическом и алгебраическом случаях формулируются одинаково: если $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, то

$$E_n(f)_C \le \frac{A}{n^\alpha}, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{4.2}$$

где A — абсолютная положительная постоянная.

Но обратные теоремы для тригонометрического и алгебраического случаев существенно отличаются. Именно если для наилучших приближений периодической функции f справедлива оценка (4.2) при $\alpha < 1$, то f удовлетворяет условию Липшица (4.1) порядка α с некоторой постоянной M.

А для приближений алгебраическими многочленами из оценки (4.2) при $\alpha < 1$ не следует, что функция f принадлежит классу $\operatorname{Lip}\alpha$ на всем отрезке $[-1, 1]$. Можно утверждать только, что f удовлетворяет условию Липшица порядка α на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$, причем множитель M в (4.1) зависит от выбора отрезка $[a, b]$.

Таким образом, оставался открытым вопрос о характеризации функций, удовлетворяющих на отрезке условию Липшица, в терминах приближения их алгебраическими многочленами.

Путь к решению этой задачи открыла работа С.М. Никольского 1946 г. [14].

В этой работе по функции $f \in \mathrm{Lip}\,1$ на $[-1,1]$ строится последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени не выше n, для которой выполняется оценка

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\biggl(|x|\frac{\ln(n+1)}{n^2}\biggr), \tag{4.3}$$

равномерная относительно $x \in [-1,1]$. Для этих многочленов в оценке (4.3) при $x = \pm 1$ нельзя заменить O на o, а главное — нельзя уменьшить множитель $\pi/2$, что следует из другого результата С.М. Никольского из той же работы [14]:

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}\,1} E_n(f)_C = \frac{\pi}{2n} + o\biggl(\frac{1}{n}\biggr), \tag{4.4}$$

причем остаточный член в формуле (4.4) отрицателен.

Оценка (4.3) дает улучшение порядка приближения вблизи концов отрезка $[-1,1]$. Это обстоятельство привело С.М. Никольского к следующей гипотезе. Для того чтобы функция f удовлетворяла на $[-1,1]$ условию Липшица порядка $\alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность алгебраических многочленов $\{p_n(x)\}$, для которой справедлива оценка

$$|f(x) - p_n(x)| \le A\biggl(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\biggr)^{\alpha}.$$

Справедливость этой гипотезы установили ученики Сергея Михайловича. В 1951 г. А.Ф. Тиман доказал соответствующую прямую теорему, а в 1956 г. В.К. Дзядык — обратную теорему.

Дальнейшие исследования показали, что многие теоремы о приближении периодических функций тригонометрическими полиномами имеют место и для приближений алгебраическими многочленами на $[-1,1]$, если вместо $1/n$ в периодическом случае писать, как в указанной гипотезе Никольского,

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

5. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Начало изучения квадратурных формул, т.е. формул приближенного интегрирования вида

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k),$$

относится к XVII в. С тех пор накоплено много разных результатов, посвященных этим вопросам.

В 1950 г. С.М. Никольский [15] рассмотрел новую экстремальную задачу о квадратурных формулах. Для заданного класса функций $\mathfrak{M}$ и заданного числа n узлов квадратурной формулы требуется найти величину

$$\inf_{a_k,\,x_k}\sup_{f \in \mathfrak{M}}\Biggl|\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)\Biggr|, \tag{5.1}$$

где нижняя грань берется по весам a_k и узлам x_k квадратурной формулы.

С.М. Никольский разработал общие вопросы, связанные с такой постановкой задачи, и получил точное ее решение в некоторых случаях.

В частности, он установил, что для нахождения величины (5.1) на классе функций $f(x)$, имеющих ограниченную производную второго порядка и удовлетворяющих начальным условиям $f(0) = f'(0) = 0$, нужно найти наилучшее приближение в метрике пространства $L[0,1]$ функции x^2 непрерывными кусочно линейными функциями, которые могут иметь n точек разрыва производной. Используя современную терминологию, можно сказать, что речь идет о приближении функции x^2 сплайнами степени 1 дефекта 1 с n свободными узлами.

Никольский доказал, что наилучшими узлами и весами в задаче (5.1) для этого класса функций являются

$$x_k = k\alpha_n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \qquad \alpha_n = \frac{4}{\sqrt{3} + 4n},$$
$$a_k = \alpha_n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \qquad a_n = \alpha_n \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, узлы оптимальной квадратурной формулы располагаются на отрезке $[0,1]$ равномерно, но ближайший к точке 1 узел приближен к концу отрезка, а веса для всех узлов, кроме последнего, равны между собой.

В те годы исследования по приближению сплайнами только начинали разворачиваться и этот результат С.М. Никольского был одним из первых, когда было найдено точное решение задачи о приближении сплайнами.

С.М. Никольским были получены также подобные результаты для квадратурных формул, в которых участвуют значения не только самой функции, но и ее производных.

В 1958 г. вышла в свет монография С.М. Никольского “Квадратурные формулы"[16], выдержавшая затем несколько изданий. Она стимулировала дальнейшие исследования экстремальных задач для квадратурных формул и содействовала внедрению в практику вычислений результатов теоретических исследований.

6. НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В работе [2] С.М. Никольский получил оценки, связывающие нормы тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа в метриках пространств L^p при разных p. Ради простоты формулировок будем говорить здесь об этой задаче только для тригонометрических полиномов.

Точная постановка вопроса такова. Рассматриваются тригонометрические полиномы от m переменных $T_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m)$, порядок которых по каждой из переменных x_k не выше n_k, $k = 1,\dots,m$.

Для заданных p и q, удовлетворяющих условиям $1 \le p < q \le \infty$, требуется оценить норму полинома $T_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m)$ в пространстве L^p через его норму в пространстве L^q. Условие $p < q$ является естественным, так как при $p > q$ соответствующие нормы как функции от $n_1,\dots,n_m$ могут вести себя одинаково по порядку.

С.М. Никольский доказал оценку

$$\|T_{n_1,\dots,n_m}\|_{L^p} \le A_m (n_1 \dots n_m)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_{n_1,\dots,n_m}\|_{L^q}, \tag{6.1}$$

где множитель A_m зависит только от m. В этой оценке порядок величины

$$(n_1 \dots n_m)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

не может быть понижен. Ранее такая оценка была известна [17] только в случае $m = 1$, $p = 2$, $q = \infty$.

Помимо оценки разных метрик (6.1), Никольский установил в работе [2] оценку для разного числа измерений:

$$\|T_{n_1,\dots,n_m}\|_{L^p(x_1,\dots,x_k)} \le A_m(n_{k+1}\dots n_m)^{\frac{1}{p}}\,\|T_{n_1,\dots,n_m}\|_{L^p(x_1,\dots,x_m)}, \qquad 1 \le k < m,$$

где $1 \le p \le \infty$ и A_m зависит только от m. Здесь порядок величины

$$(n_{k+1}\dots n_m)^{\frac{1}{p}}$$

также не может быть понижен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнейчук Н.П.* С.М. Никольский и развитие исследований по теории приближения функций в СССР // УМН. 1985. Т. 40, №5. С. 71–131.
2. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
3. *Бесов О.В.* О работах С.М. Никольского по теории функциональных пространств и ее приложениям // Наст. изд. С. 25–30.
4. *Lebesgue H.* Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. France. 1910. V. 38. P. 184–210.
5. *Kolmogoroff A.* Zur Grössenordnung des restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. 1935. V. 36. P. 521–526.
6. *Никольский С.М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. С. 501–508.
7. *Никольский С.М.* Оценка остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную // ДАН СССР. 1941. Т. 31. С. 210–214.
8. *Никольский С.М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами // ДАН СССР. 1941. Т. 31. С. 215–218.
9. *Никольский С.М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 386–389.
10. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. Л.; М.: Изд-во АН СССР, 1945. (Тр. МИАН; Т. 15).
11. *Никольский С.М.* Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности // ДАН СССР. 1946. Т. 52. С. 191–194.
12. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
13. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // C. r. Acad. sci. Paris. 1936. V. 203. P. 1122–1124.
14. *Никольский С.М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 295–322.
15. *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближения квадратурными формулами // УМН. 1950. Т. 5, №2. С. 165–177.
16. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Физматгиз, 1958.
17. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. P. 889–906.